

Prérequis : exercices n° 1, 2 et 3 page 104 du manuel 1^{re} Maths 2019 Lelivrescolaire.fr

Comprendre la notion de dérivation de manière intuitive : <https://www.youtube.com/watch?v=cv0djQqfwBg>

I. Limite en zéro d'une fonction

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(x+1)^2 - 1}{x}$.

L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	...	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

2) Soit la fonction g définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de g lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$ et on note :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty.$$

Définition : On dit que $f(x)$ a pour limite L lorsque x tend vers 0 si les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de 0.
On note : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ et on lit : La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à L .

II. Nombre dérivé et fonction dérivable

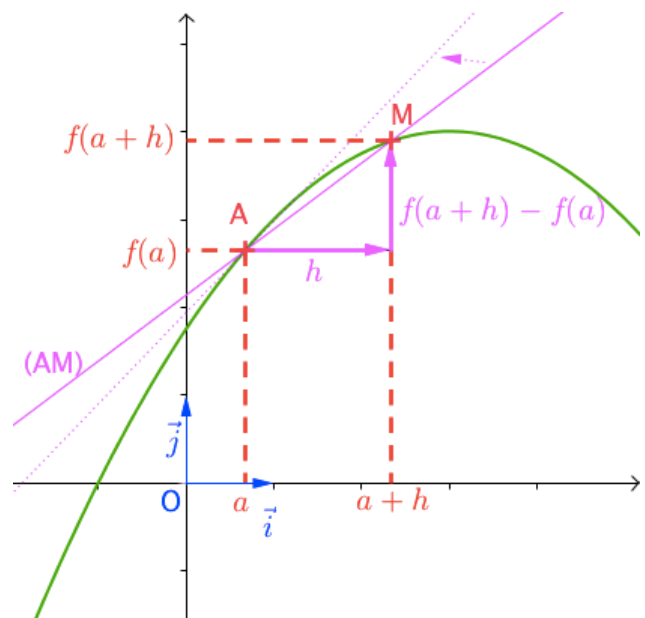
Soit une fonction f définie sur un intervalle I . Soit un réel a appartenant à I .

Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et $a+h$, avec $h \neq 0$.

La pente de la droite (AM) est égale à : $\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}$
 $= \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Lorsque le point M se rapproche du point A, la pente de la droite (AM) est égale à la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

Cette pente s'appelle **le nombre dérivé de f en a** et se note $f'(a)$.



Définition : On dit que la fonction f est **dérivable** en a s'il existe un nombre réel L , tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L.$$

L est appelé **le nombre dérivé de f en a** et se note $f'(a)$.



Exemple : Démontrer qu'une fonction est dérivable

Soit la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Démontrer que f est dérivable en $x = 2$.

On commence par calculer $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \frac{(2+h)^2 + 2(2+h) - 3 - 2^2 - 2 \times 2 + 3}{h} \\ &= \frac{4 + 4h + h^2 + 4 + 2h - 8}{h} \\ &= \frac{6h + h^2}{h} \\ &= \frac{h(6+h)}{h} \\ &= 6 + h \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 6 + h = 6$$

On en déduit que f est dérivable en $x = 2$. Le nombre dérivé de f en 2 vaut 6 et on note : $f'(2) = 6$.



Attention : ne pas confondre $f'(2)$ avec $f(2)$.



Exercices : n° 38 et 41 page 120.

Montrer que la fonction $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

A quoi cela sert-il ? dans le devoir maison précédent, **la vitesse du missile** pour une abscisse t est donnée par le nombre dérivé $f'(t)$

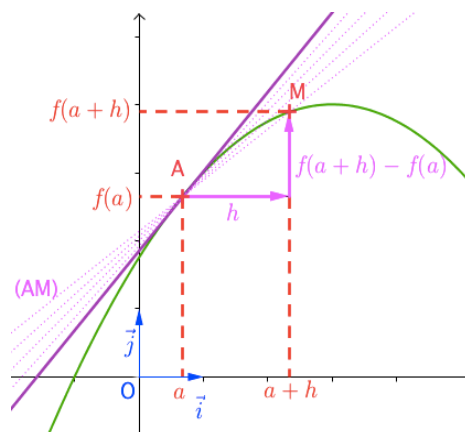
III. Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et **dérivable** en un nombre réel a appartenant à I .
 $f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a .

A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f .



Définition : La **tangente** à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.



Reprenons l'exemple précédent :

On a vu que pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ on a : $f'(2) = 6$.

Ainsi la tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse 2 est la droite passant par A et de coefficient directeur 6.



Propriété : Une équation réduite de la tangente à la courbe C_f en A est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Démonstration au programme :

La tangente a pour pente $f'(a)$ donc son équation est de la forme : $y = f'(a)x + b$ où b est l'ordonnée à l'origine.

Déterminons b :

La tangente passe par le point $A(a ; f(a))$, donc :

$$f(a) = f'(a) \times a + b \quad \text{soit : } b = f(a) - f'(a) \times a$$

On en déduit que l'équation de la tangente peut s'écrire :

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a$$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Pour revoir à la maison la démonstration en vidéo : <https://youtu.be/Jj0ql6-o2Uo>

Reprenons l'exemple précédent :

Déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

On a vu plus haut que la pente de la tangente est égale à 6.

Donc son équation est de la forme : $y = 6(x - 2) + f(2)$, soit :

$$y = 6(x - 2) + 2^2 + 2 \times 2 - 3$$

$$y = 6x - 7$$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est $y = 6x - 7$.



Exercices : n° 20, 23, 24 page 119 + n° 32, 44 et 47 pages 120 et 121.
 n° 57 page 123 + n° 61 et 73 pages 124 et 125..